

Problemas matemáticos vinculados al crecimiento de grietas

Seminario CADEDIF

Gerardo Oleaga

22 de Enero 2010

- 1 Ideas básicas
 - Introducción
 - Trabajos clásicos
 - Criterios de propagación
- 2 Ley de propagación en Modo III
 - El problema
 - Trabajos previos
 - Condiciones de contorno y transformaciones conformes.
- 3 Extensiones más generales.
 - La ecuación diferencial de Loewner
 - Energía relajada como función de F_t
 - Transformaciones generadas por evoluciones de Loewner

Grietas idealizadas.

- Dentro de un cuerpo sólido elástico, una grieta idealizada es un corte cuyas caras están separadas una distancia suficiente como para no estar en contacto, pero pequeña comparada con las dimensiones del sólido.
- El contorno del cuerpo puede estar sometido a tracción, pero asumiremos que la superficie de la grieta estará libre de toda fuerza normal.

Hipótesis básicas para un modelo matemático de Fractura

- Consideramos una única grieta macroscópica.
- Se asumirán las leyes de la Mecánica de Medios Continuos y dentro de éstas la aproximación lineal, válida para pequeñas deformaciones.
- Supondremos que el medio es homogéneo, isótropo y perfectamente frágil (esto es, con comportamiento elástico hasta el límite de ruptura).
- Una vez creada la grieta, ésta no puede volver a sellarse (irreversibilidad del proceso de fractura).

- Basadas en el campo elástico (combinación de tensiones, deformaciones): La grieta se propaga cuando una combinación particular de parámetros, tales como el esfuerzo, la deformación, etc, alcanza un valor crítico.
- Basadas en criterios energéticos: la propagación comienza cuando la energía elástica acumulada permite “crear superficie nueva” (Griffith 1920).

La energía total del sistema cuerpo-grieta:

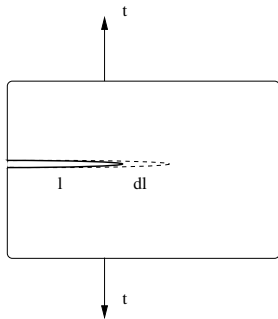
$$V = E + S$$

Donde E es la energía mecánica (elástica + sistema de tracciones) y S es la energía de superficie, que corresponde al trabajo necesario para crear la grieta.

En el modelo de Griffith se considera que:

$$S = \kappa l$$

donde l es la longitud de la grieta y κ es una constante del material.



La grieta estará en un estado crítico si

$$\frac{dV}{dl} = 0.$$

En este caso hay un balance de la fuerza generalizada $-\frac{dE}{dl}$ y la fuerza de resistencia al crecimiento de la grieta:

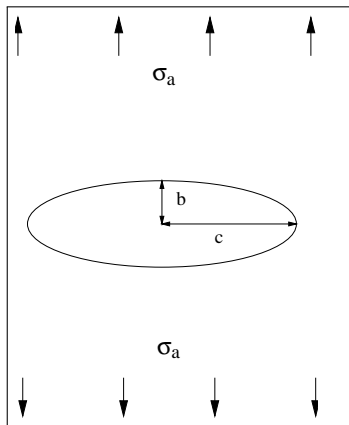
$$-\frac{dE}{dl} = \kappa.$$

Dicho de otro modo, si al extender **virtualmente** la grieta una longitud dl tenemos que $dV > 0$, entonces el sistema está estabilizado:

$$\frac{dV}{dl} > 0 \Rightarrow -\frac{dE}{dl} < \kappa$$

de modo que la fuerza mecánica disponible no es suficiente para crear más superficie.

Griffith se basa en un trabajo clásico de Inglis quien considera un medio bidimensional elástico, con un agujero elíptico cuyo semieje horizontal tiene longitud c , y cuyo semieje vertical es de longitud b , sujeto a una tensión uniforme σ_a a lo largo del eje y . Se desea evaluar el efecto del agujero sobre la distribución de esfuerzos en el sólido.



Las tensiones son singulares para $b \rightarrow 0$

$$\frac{x^2}{c^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

el radio de curvatura tiene un mínimo en los extremos de la elipse:

$$\rho = b^2/c, \quad (b < c)$$

Allí, las tensiones tienen una concentración más grande:

$$\begin{aligned}\sigma_{\max} &= \sigma_a (1 + 2c/b) \\ &= \sigma_a \left(1 + 2(c/\rho)^{1/2}\right)\end{aligned}$$

Cuando $b \ll c$:

$$\sigma_{\max}/\sigma_a \approx 2c/b = 2(c/\rho)^{1/2} \gg 1$$

Cálculo de la energía total

La diferencia entre la energía mecánica del cuerpo incluyendo un corte de longitud $2c$, y la del cuerpo sin grieta:

$$E = -\frac{\pi c^2 \sigma_a^2}{Y}$$

donde Y identifica al módulo de Young. Para el término de energía superficial, Griffith escribió:

$$S = 2c\kappa$$

La energía total del sistema viene dada por:

$$V = -\pi c^2 \sigma_a^2 / Y + 2c\kappa.$$

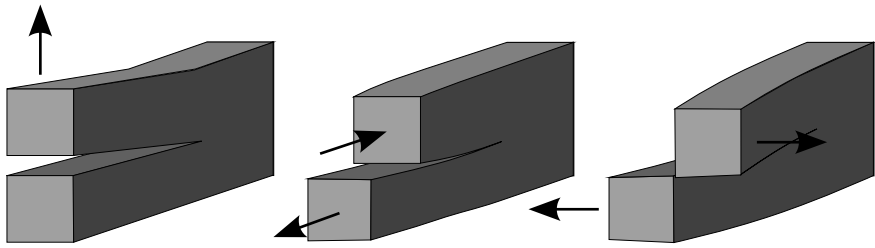
Aplicando la condición de equilibrio obtenemos la relación entre carga aplicada y longitud en el estado crítico:

$$\frac{\pi c \sigma_a^2}{Y} = \kappa.$$

Irwin: el factor de intensidad de tensiones

Irwin (1957) caracteriza la singularidad del campo elástico alrededor de la punta de la grieta por medio de unos parámetros llamados factores de intensidad de tensiones.

$$\sigma_{ij} \sim \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \Sigma_{ij}^I(\theta) + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \Sigma_{ij}^{II}(\theta) + \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \Sigma_{ij}^{III}(\theta)$$



Modo I:
Apertura

Modo II:
Corte en plano

Modo III:
Corte fuera del plano

Irwin encuentra una relación local para la derivada de la energía mecánica con respecto a l . En Modo I puro:

$$G := -\frac{dE}{dl} = K_I^2 \frac{(1 - \nu^2)}{Y} \quad (\nu := \text{coef. Poisson}) .$$

Esta cantidad puede ser también expresada por medio de una integral (llamada integral J) y fue estudiada por J.D.Eshelby (1956), Cherepanov (~ 1960) y J.Rice (1968).

Los criterios de propagación: ideas básicas

- Los estudios clásicos permiten formular criterios para determinar si se producirá el crecimiento de una grieta preexistente, pero no nos dicen cuál es la ley que define su trayectoria.
- Un criterio básico es el de la “máxima tasa de liberación de energía” (G_{max}), que propone que la dirección de crecimiento debe ser la que permite liberar la mayor cantidad de energía mecánica por unidad de longitud.
- Otro criterio (para Modos I y II) es el de “simetría local”, formulado por R. V. Gol'dstein y R. L. Salganik, Int. J. Fracture 10, 507 (1974).

$$K_{II} = 0$$

La relación entre ambos criterios es estudiada por B. Cotterell and J. R. Rice, Int. J. Fracture 16, 155 (1980).

El criterio G_{max} puede ser interpretado de manera variacional. Dada una configuración del sistema cuerpo-grieta, consideramos **extensiones virtuales** de la grieta en diferentes direcciones:

$$G(\varphi) = -\frac{dE}{dl} \quad (\text{extensión en la dirección } \varphi).$$

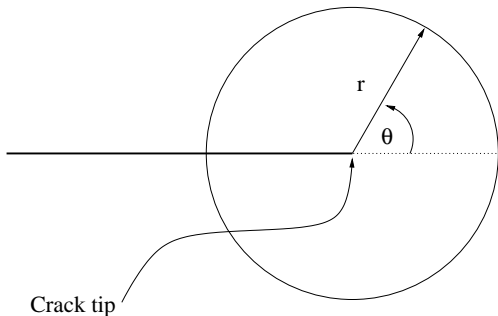
Si la energía total decrece en esa dirección, la configuración es inestable. Si la energía crece la configuración es estable:

$$G(\varphi) \leq \kappa \Rightarrow \text{garantiza estabilidad}$$

Si sumamos la condición crítica de Griffith, tenemos que la dirección de crecimiento debe cumplir:

$$\max_{\theta} G(\theta) = \kappa.$$

¿Cuál es la dirección con G máximo para un campo inicial en equilibrio?



El campo de desplazamientos (en la dirección z) satisface:

$$\begin{aligned}\Delta u &= 0 \quad \text{en } \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma \\ \partial_n u &= 0 \quad \text{sobre } \Gamma\end{aligned}$$

La expansión asintótica alrededor de la punta viene dada por:

$$u(r, \theta) = k_0 + k_1 r^{1/2} \text{sen}(\theta/2) + k_2 r \cos(\theta) + \dots$$

En este caso, el criterio de Griffith puede escribirse como:

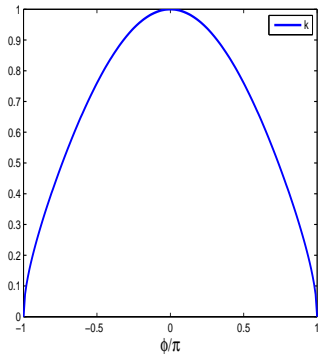
$$G(0) = \frac{K_{III}^2}{2\mu} = \frac{\mu\pi k_1^2}{4} = \kappa.$$

($K_{III} = \mu k_1 \sqrt{\frac{\pi}{2}}$, $\mu :=$ constante de Lamé) nos da información sobre el estado crítico de la grieta.

Resultados previos sobre k_1 para distintos ángulos

El factor de intensidad de tensiones para el plano con un corte en forma de semirrecta y una grieta incipiente fue estudiado por varios autores: Sih (1965) J.App.Mech., Smith (1968) JMPS, Bilby and Cardew Int. Journal of Fracture (1975):

$$K_{III}(\varphi) = K \left(\frac{\pi - \varphi}{\pi + \varphi} \right)^{\varphi/2\pi}$$



Utilizando la relación de Irwin tenemos que

$$G(\varphi) = \frac{K_{III}^2(\varphi)}{2\mu}$$

por lo tanto la dirección óptima de crecimiento ocurre *en la misma dirección de la grieta preexistente*.

- El criterio de máxima tasa de liberación de energía involucra solamente a la contribución lineal en la expansión de la energía: ¿cómo afectan los términos de mayor orden en el desarrollo? (y, ¿qué forma tienen?).

Energía elástica y representación compleja de u

◇ Energía elástica almacenada

$$E = \frac{1}{2} \int_{\Omega \setminus \Gamma} |\nabla u|^2 d\Omega$$

◇ Incremento de la energía Elástica para una extensión $\Delta\Gamma$:

$$\Delta E = \frac{1}{2} \int_{\Delta\Gamma} [u_l] \frac{\partial u_0}{\partial n^+} ds \quad [u_l] = u^+ - u^-$$

◇ Representación compleja

$$u(x_1, x_2) = \operatorname{Re} \eta(x_1 + ix_2)$$

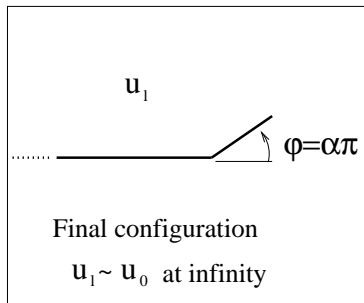
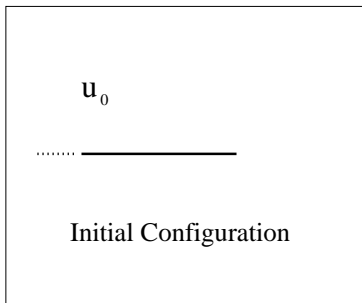
$$\eta' = \frac{\partial u}{\partial x_1} - i \frac{\partial u}{\partial x_2} = \sigma_{31} - i\sigma_{32} \quad \sigma := \text{tensor de tensiones.}$$

$$\frac{d}{ds} \eta(x_1(s) + ix_2(s)) = \left(\frac{\partial u}{\partial t} - i \frac{\partial u}{\partial n} \right) |x'_1 + ix'_2|$$

$t, n :=$ direcciones tangente y normal

La extensión en ángulo

La configuración inicial es una grieta en semirrecta y un campo de desplazamientos u_0 que satisface las ecuaciones de equilibrio.



Problema de contorno en el plano

$$\begin{aligned}\Delta u_0 &= 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma_0 \\ \partial_n u_0 &= 0 \quad \text{on } \Gamma_0\end{aligned}$$

con la condición de energía finita:

$$\int_{B_r} |\nabla u_0|^2 < \infty$$

Para u_l pedimos la misma ecuación de equilibrio y condición de energía junto con la “condición de acoplamiento”:

$$|u_l - u_0| \rightarrow 0 \quad \text{uniformemente en infinito.}$$

Escribimos

$$u_0 = \operatorname{Re} [\eta_0(\zeta)] \quad \eta_0 \text{ analítica en } \mathbb{C} \setminus \Gamma_0$$

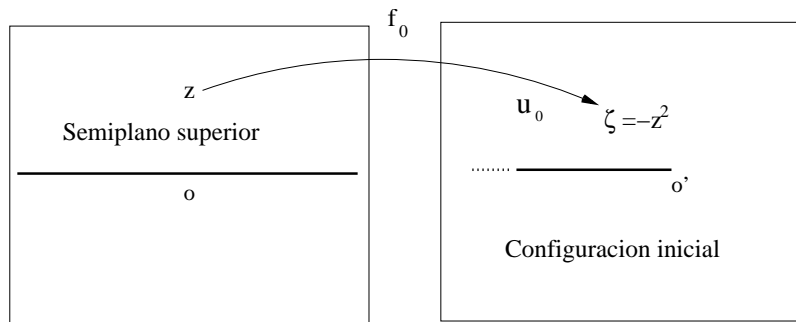
y tal que

$$\eta'_0(\zeta) = \frac{\partial u_0}{\partial x} - i \frac{\partial u_0}{\partial y} \Rightarrow \eta'_0 \text{ es real sobre } \Gamma_0.$$

El semiplano superior se puede llevar a la configuración inicial por medio de:

$$f_0(z) = -z^2$$

Serie de potencias en el dominio transformado



Teniendo en cuenta las condiciones de contorno, la función:

$$h_0(z) := \eta_0(f_0(z))$$

puede ser extendida por simetría a todo el plano, con expansión alrededor del origen:

$$h_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \quad c_n \in \mathbb{R}.$$

Bajo estas condiciones, u_0 admite un desarrollo convergente:

$$u_0 = \operatorname{Re} [h_0 (f_0^{-1}(\zeta))] = c_0 - c_1 r^{1/2} \sin(\theta/2) - c_2 r \cos(\theta) + \dots \quad (1)$$

donde

$$\zeta = re^{i\theta} \quad f_0^{-1}(\zeta) = \sqrt{-\zeta}$$

Consideramos (1) como el campo de desplazamientos inicial más general.

La transformación conforme para caminos en ángulo

Para un ángulo φ dado, consideramos la transformación:

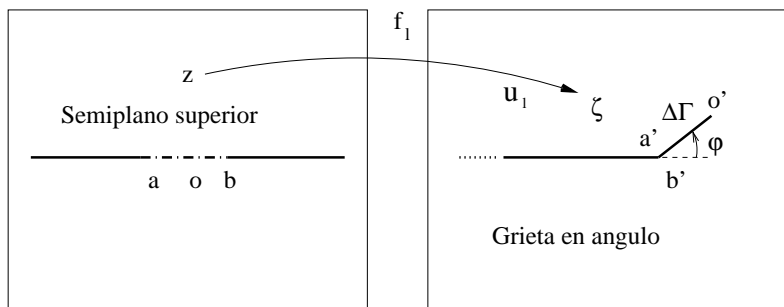
$$f_l(z) := -(z - a(l))^{1-\alpha} (z - b(l))^{1+\alpha}, \quad (-1 \leq \alpha \leq 1)$$

donde $\alpha := \varphi/\pi$:

$$a(l) := -\sqrt{l} \left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha} \right)^{\frac{1+\alpha}{2}}, \quad b(l) := \sqrt{l} \left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha} \right)^{\frac{1-\alpha}{2}},$$

$$f_l : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{C} \setminus \Gamma_l.$$

Propiedades de la transformación



$$f_1(\mathbb{R}) = \Gamma_1 \quad y \quad f_1([a, b]) = \Delta\Gamma$$

Escribiendo $u_I = \operatorname{Re} [\eta_I(\zeta)]$ tenemos que

$$h_I(z) := \eta_I(f_I(z))$$

es analítica en todo \mathbb{C} y admite el desarrollo:

$$h_I(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(I) z^n, \quad c_n(I) \in \mathbb{R}.$$

Concluimos que, en el dominio físico:

$$u_I = \operatorname{Re} \left[\sum_{n=0}^{\infty} c_n(I) (f_I^{-1}(\zeta))^n \right], \quad \zeta \in \mathbb{C} \setminus \Gamma_I.$$

Relación entre c_n y $c_n(l)$

Usando analiticidad, condiciones de Neumann y la condición de acoplamiento asintótico en infinito tenemos que:

$$c_n(l) = c_n + (n+1)c_{n+1}b_0(l) + O(l),$$

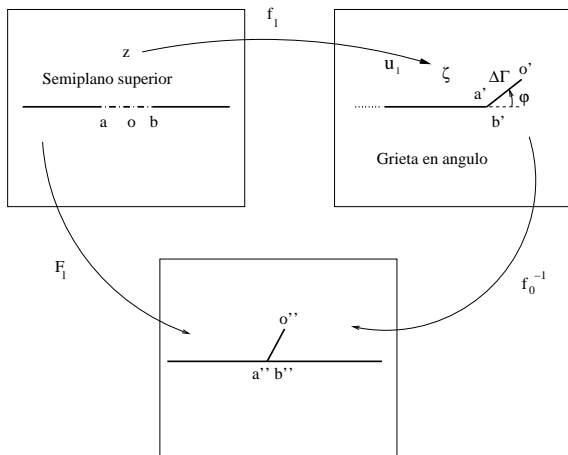
donde b_0 se obtiene del desarrollo en infinito de la función:

$$\begin{aligned} F_l(z) &= f_0^{-1} \circ f_l(z) = \sqrt{(z - a(l))^{1-\alpha} (z - b(l))^{1+\alpha}} \\ &= z + b_0(l) + \frac{b_1(l)}{z} + \frac{b_2(l)}{z^2} \dots \quad z \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Además:

$$F_l(z) = \sqrt{l} F_1\left(\frac{z}{\sqrt{l}}\right) \Rightarrow b_n(l) = \left(\sqrt{l}\right)^{n+1} b_n(1).$$

La función $F_I(z)$



F_I puede ser extendida como función holomorfa a $\mathbb{C} \setminus [a, b]$.

Fórmula compleja para la energía relajada

El ingrediente más importante es la fórmula de energía:

$$\Delta E = \frac{\mu}{4i} \int_C h'_l(z) h_0(F_l(z)) dz,$$

donde C es cualquier curva cerrada rodeando el intervalo $[a, b]$. Usando las propiedades analíticas de h_l , h_0 y el desarrollo de F_l obtenemos:

$$\Delta E = \frac{\mu}{4i} \int_C \left(\sum_{j=1}^l l^{\frac{j}{2}} c_j(l) z^{j-1} \right) \left(\sum_{k=1}^k l^{\frac{k}{2}} c_k F_1(z)^k \right) dz,$$

donde C rodea al intervalo $[a(1), b(1)]$.

La expansión hasta primer orden en l está dada por:

$$-\Delta E = l \frac{\mu\pi}{4} c_1^2 \left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha} \right)^\alpha + O(l^{3/2}),$$

donde obtenemos:

$$G(\varphi) = \lim_{l \rightarrow 0} \left(-\frac{\Delta E}{l} \right) = \frac{\mu\pi}{4} c_1^2 A(\varphi/\pi),$$

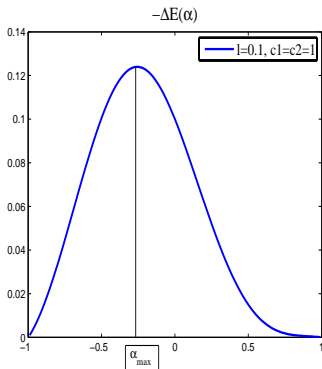
siendo la misma función que la obtenida por Sih (1965) con tensiones uniformes en infinito. Este término no nos aporta información sobre la forma de crecimiento.

Un término más

Los primeros dos términos del desarrollo son:

$$-\Delta E = \frac{\mu\pi}{4} c_1^2 A(\alpha) l - \frac{4\mu\pi}{3} c_1 c_2 B(\alpha) l^{\frac{3}{2}} + O(l^2)$$

donde $B(\alpha) := \frac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}} A(\alpha)^{\frac{3}{2}}$.



Si calculamos el máximo de $-\Delta E$ en términos de α para l fijo, encontramos el ángulo óptimo:

$$\alpha = -\frac{4}{3} \frac{c_2}{c_1} l^{1/2} + o(l^{1/2}).$$

Esto sugiere la siguiente forma inicial para $c_2 \neq 0$:

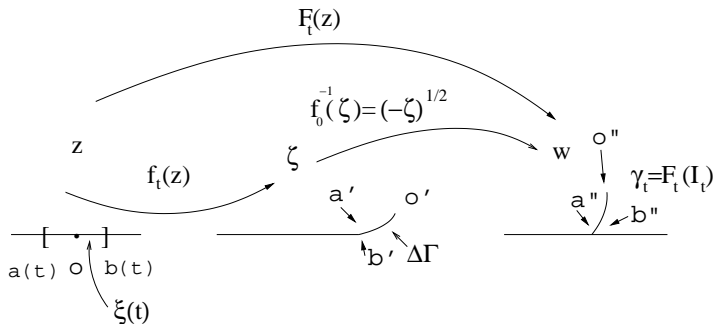
$$x_2 \approx -\frac{4\pi}{3} \frac{c_2}{c_1} (x_1)^{3/2}, \quad x_1 > 0.$$

La contribución del término añadido introduce una singularidad en el camino de la grieta: implica una curvatura infinita en la punta.

Extensiones arbitrarias como caminos virtuales

- Las extensiones en ángulo son útiles para cuantificar la desviación óptima cuando *permitimos a la grieta dar un salto de longitud l* .
- Esta configuración no es admisible si la grieta crece en forma continua: para $l \rightarrow 0$, la desviación tiende también a cero.

La transformación F_t : Slit maps



$F_t : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H} \setminus \gamma_t$. Definimos ξ_t como $F_t^{-1}(\gamma(t))$ ($\xi_t \in \mathbb{R}$). El parámetro t *no se identifica con la longitud de la grieta extendida*.

Se puede mostrar (G.O. 2006 EJAM) que el desarrollo asintótico para la energía está dado por:

$$\begin{aligned}\Delta E(t) &= \\ \frac{\mu}{4i} \int_C &\left(c_1^2 F_t(z) + c_1 c_2 \left(F_t(z)^2 + 2F_t(z)(z + b_0(t)) \right) \right) dz + O(|l_t|^4) \\ &= \frac{\pi\mu}{2} (c_1^2 b_1(t) + 4c_1 c_2 (b_0(t) b_1(t) + b_2(t))) + O(|l_t|^4),\end{aligned}$$

para $|l_t| \rightarrow 0$ donde $|l_t|$ es la longitud del intervalo $[a(t), b(t)]$. Es decir, ahora no podemos controlar la longitud de la grieta, pero sí el tamaño del intervalo en el dominio z . Ésta es una restricción *artificial* pues no está directamente relacionada con la energía disipada.

Excursión: Problemas variacionales en teoría geométrica de funciones

La búsqueda de extremos de funcionales definidos en familias de funciones analíticas es un problema básico de la “geometric function theory”. Por ejemplo, consideremos a la familia de funciones univalentes (“schlicht”) complejas:

$$f \in \mathcal{F} \iff z \in \mathbb{D} \mapsto f(z) \in \mathbb{C}$$

tal que

$$f(z) = z + \sum_{j=2}^{\infty} c_j z^j \quad (f(0) = 0, f'(0) = 1)$$

(esta se llama la [clase S](#), cf. Duren, “Univalent functions”) y los funcionales elementales:

$$\phi(f) = f(z_0) \quad z_0 \in \mathbb{D}$$

Ejemplo: funcionales de orden finito

Otro ejemplo es el de los funcionales que dependen de los coeficientes del desarrollo

$$\phi(f) = F(\{c_i\}_{i \in A})$$

si el conjunto A de índices es finito, éste se llama un funcional *orden finito*. Estos funcionales son continuos en la topología definida por la convergencia uniforme sobre compactos.

Bieberbach conjeturó en 1916 que los coeficientes de una función de la familia S debían satisfacer la desigualdad:

$$|c_n| \leq n \quad \forall n \geq 2.$$

Hay una famosa transformación de Koebe que satisface la igualdad:

$$k(z) = \frac{1}{4} \left(\frac{1+z}{1-z} \right)^2 - \frac{1}{4}$$

La transformación $w = \frac{1+z}{1-z}$ lleva el disco unidad en el semiplano $\operatorname{Re}(w) > 0$, la potencia lo transforma en un slit map! y el resto son constantes de normalización.

Diversos métodos variacionales se desarrollaron para demostrar la conjetura. Uno especialmente interesante para el problema planteado es el método de Schiffer que consiste en realizar *variaciones univalentes* de la frontera de un slit map para obtener información sobre su forma. Es decir, para determinar el borde de la región transformada por una función extremal.

ahora sí: seguimos con la propagación de una grieta

Si aplicamos el método variacional de Schiffer a la familia de funciones univalentes complejas definida por:

- F analítica, univalente, definida fuera de un intervalo real I :
 $z \in \mathbb{C} \setminus I \mapsto F(z) \in \mathbb{C}$.
- F normalizada (normalización hidrodinámica):

$$F(z) = z + \frac{b_1}{z} + \frac{b_2}{z^2} + \dots$$

Si optimizamos el funcional de orden finito definido por:

$\mathcal{E}(F) = \operatorname{Re}(c_1^2 b_1(F) + 4c_1 c_2 b_2(F))$, encontramos nuevamente como forma óptima la gráfica de $x^{3/2}$ en el dominio físico de la grieta!

El problema planteado anteriormente es artificial, pues no está restringido por el verdadero término de disipación que es proporcional a la longitud de la grieta. El cálculo anterior sólo puede ser usado como guía para tener un candidato que nos dé una idea sobre la forma óptima.

Para obtener una ley de propagación haremos extensiones virtuales siguiendo la forma $x^{3/2}$ e imponiendo la condición de equilibrio. Generamos las transformaciones conformes con la técnica de Löwner, que también fue utilizada para la demostración de la conjetura de Bieberbach realizada por de Branges en 1985.

Es posible generar “slit maps” de diversas formas por medio de una transformación conforme generada por la llamada *chordal Löwner equation*:

$$\partial_t F_t(z) = -\frac{2\partial_z F_t(z)}{z - \xi_t}, \quad F_0(z) = z.$$

Para las transformaciones generadas por la ecuación de Löwner tenemos que:

$$b_0(t) = 0, \quad b_1(t) = -2t.$$

El desarrollo asintótico de la energía es:

$$\Delta E(t) = \frac{\pi\mu}{2} (-2tc_1^2 + 4c_1c_2b_2(t)) + O(|I_t|^4), \quad \text{para } |I_t| \rightarrow 0.$$

Resultados de W. Kager, B. Nienhuis and L. Kadanoff (2004) proporcionan algunas soluciones explícitas de la ecuación de Loewner. Un caso elemental es $\xi_t \equiv 0$, la ecuación es

$$\partial_t F_t(z) + \frac{2\partial_z F_t(z)}{z} = 0, \quad F_0(z) = z.$$

El intervalo $I(t)$ está dado por $[-2\sqrt{t}, 2\sqrt{t}]$. Y tenemos que:

$$F_t(z) = \sqrt{z^2 - 4t},$$

que genera grietas rectas y verticales (horizontales en el dominio físico) desde el origen:

$$f_0(\gamma(t)) = -(F_t(0))^2 = 4t$$

$b_2(t) \equiv 0$. En este caso la energía no tiene un término de orden $t^{3/2}$.

“Forzamiento” lineal

Tomando

$$\xi_t = \lambda t.$$

La ecuación de Löwner es:

$$\partial_t F_t(z) = -\frac{2\partial_z F_t(z)}{z - \lambda t}, \quad F_0(z) = z.$$

y el comportamiento asintótico de la extensión en el plano físico es:

$$x_2 = -\frac{\lambda}{3}x_1^{3/2} + o\left(x_1^{3/2}\right).$$

Por otra parte $b_2(t) = -\lambda t^2$. Una extensión hasta “tiempo” t va a relajar la cantidad de energía:

$$\Delta E = -\mu\pi c_1^2 t - 2\mu\pi\lambda c_1 c_2 t^2 + O(t^3).$$

Para el término de superficie tenemos que:

$$\Delta S(t) = \kappa l(t)$$

El camino $\Delta\Gamma$ en el plano físico tiene la forma:

$$\begin{aligned}\Delta\Gamma(t) &= f_0(\gamma(t)) = -(\gamma(t))^2 \\ &= 4t - \frac{8}{3}i\lambda t^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}\lambda^2 t^2 + O(t^{5/2}).\end{aligned}$$

Y la longitud de la extensión:

$$l(t) = 4t + \frac{2\lambda^2}{3}t^2 + O(t^3).$$

Juntando los términos de energía elástica y de superficie:

$$\Delta E + \Delta S = (4\kappa - \pi\mu c_1^2)t + \left(\frac{2\kappa\lambda^2}{3} - 2\mu\pi\lambda c_1 c_2 \right) t^2 + O(t^3)$$

- El término de orden t se cancela debido a la condición crítica $c_1^2 \pi \mu = 4\kappa$.
- Para satisfacer la condición de estabilidad (crecimiento cuasiestático) el término de orden t^2 debe ser no-negativo.

Calculando el mínimo con respecto al parámetro λ :

$$\lambda_{min} = \frac{3\mu\pi c_1 c_2}{2\kappa}.$$

El incremento de energía para el camino definido por λ_{min} es

$$\Delta E + \Delta Q = -\frac{3}{2} \frac{\mu^2 \pi^2}{\kappa} c_1^2 c_2^2 t^2 + O(t^3) < 0 \quad \text{for } t \rightarrow 0.$$

La única forma de evitar esta inestabilidad es imponer:

$$c_2 = 0$$

al campo inicial. Esto es equivalente a $k_2 = 0$ en la expansión típica alrededor de la punta:

$$u_0 = k_0 + k_1 r^{1/2} \sin(\theta/2) + k_2 r \cos(\theta) + \dots$$

evitando la contribución simétrica del campo local.