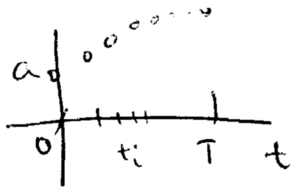
De discreto a continuo

1) Determinista



$\forall T>0$ sea $N\in\mathbb{N}$ y $\Delta t = \frac{T}{N}$

$$(SD)\quad \begin{cases} X_{i+1} = X_i + f_i\, h & i=0,\dots,N-1 \\ X_0 = a & t_i = i\cdot\Delta t \end{cases}$$

$$X_i = a + \sum_{j=0}^{i-1} f_j\, h \qquad i=0,\dots N$$

si $f_i = f(t_i)$ para cierta $f:[0,T]\to\mathbb{R}$

$$\sum_{j=0}^{i-1} f(t_j)\,\Delta t\left[\frac{h}{\Delta t}\right] \quad ; \text{ como } \quad \sum_{j=0}^{N-1} f(t_j)\,\Delta t \xrightarrow[N\to\infty]{} \int_0^T f(t)\,dt$$

entonces si $h = o(\Delta t) \Rightarrow X_N = X(T) \underset{N\to\infty}{\Rightarrow} a$

si $h = O(\Delta t) \Rightarrow X_N = X(T) \xrightarrow[N\to\infty]{} a + \int_0^T f(t)\,dt$

si $h \gg \Delta t \Rightarrow |X_N| \nearrow \infty \quad N\to\infty$

Así que el proceso discreto da lugar a una función

a) $$X(T) = a + \int_0^T f(t)\,dt \quad \forall T \iff \frac{h}{\Delta t} = O(1)$$

b) asignando adecuadamente los valores f_i podemos generar $(N\to\infty,\ \forall T)$ cualquier función absolutamente continua

c) El sistema discreto se puede escribir $\Delta X_i = f_i\,\Delta t$ y $\forall T$ fijo, con $N\to\infty$ $\{t_i\}$ es denso en $[0,T] \Rightarrow \{f_i = f(t_i)\} \sim f(t)$

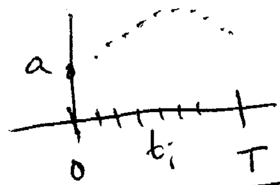
así que el límite formal es

$$dX(t) = f(t)\,dt \quad \left(\iff X(t) = a + \int_0^t f(r)\,dr \quad \forall t\right).$$

b) Caso estocástico

Supongamos $T>0$, $N>0$ $\quad \Delta t = \frac{T}{N} \quad t_i = i\Delta t$

y un sistema discreto estocástico



$$\begin{cases} X_{i+1} = X_i + f_i \Delta t + h\xi_i & i = 0, \dots, N-1 \\ X_0 = a \end{cases}$$

CBS Esto vale si $f_j = f(t_j)$

$f:[0,T] \to L^1(dP)$ $\quad E(|f(t)|) < \infty$ ctp

$\int_0^T E(|f(t)|)dt < \infty$

$L^1(0,T)$. $\int_0^T f(t)dt$ define una v.a en $L^1(dP)$

donde las ξ_i son ahora v.a.

$$X_i = a + \underbrace{\sum_{j=0}^{i-1} f_j \Delta t}_{} + h\sum_{j=0}^{i-1} \xi_j$$

$X_T = X_{N+1}$ como antes

El caso más simple para $\{\xi_i\}$ es suponer que son v.a i.i.d con media μ y varianza σ^2

Poniendo $a = 0 = f_i$ (parte determinista)

resulta que $\quad E(X_i) = h(i-1)\mu$

$\quad V(X_i) = h^2\sigma^2(i-1)$

En particular $\quad X(T) = h\sum_{i=0}^{N-1} \xi_i \; (= X_N)$ ~~E(X(T))~~

⊛ En este caso

$$\boxed{X(T) \sim N(0, \sqrt{T})}$$

e.d: $\lim_{N\to\infty} P\left(a \le \frac{X(T)-(N-1)h\mu}{\sigma h\sqrt{N-1}} \le b\right) = F(b) - F(a)$ $\quad F =$ distrib. $N(0,1)$

y el Teorema Central del Límite dice que

$$\frac{X(T) - E(X(T))}{\sqrt{V(X(T))}} = \frac{X(T) - (N-1)h\mu}{\sigma h\sqrt{N-1}} \xrightarrow[N\to\infty]{} N(0,1)$$

Ley (en ~~probabilidad~~)

Por tanto, para garantizar que $X(T)$ es una v.a bien definida

$h(N-1)\mu$ y $\sigma h\sqrt{N-1}$ deben ambas permanecer

acotadas con $N \to \infty$.

Esto implica necesariamente que $\boxed{\mu = 0}$ y $\boxed{h = \sqrt{\Delta t}}$ ⊛

$$h\sqrt{N} = O(1) \iff h^2\frac{1}{\Delta t} = O(1) \quad \text{e.d}$$

(mejor $h^2 N = h^2 \frac{T}{\Delta t}$)

(la otra posibilidad $\sigma = 0$ $\quad \mu N = O(1)$ no tiene sentido)

Así el sistema discreto es

$$\begin{cases} X_{i+1} = X_i + f_i \Delta t + \sqrt{\Delta t}\, \xi_i \\ X_0 = a \end{cases}$$

$$X_i = a + \sum_{j}^{i-1} f_j \Delta t + \sum_{j}^{i-1} \xi_j \sqrt{\Delta t}$$

$$X(T) = a + \int_0^T f(t)dt + \eta(T) \qquad \eta(T) \sim N(0, \sqrt{T})$$

Supong $\xi_i = \xi(t_i)$ $\qquad \eta(T) := \lim_{N\to\infty} \sum_{j}^{N-1} \xi_j(t_j)\sqrt{\Delta t}$

Así $\eta(T) - \eta(S) \sim N(0, \sqrt{T-S})$

y todos los incrementos

$\eta(t_1), \eta(t_2) - \eta(t_1), \ldots, \eta(t_n) - \eta(t_{n-1})$ son independientes.

E.d $\{\eta(t)\}_t$ es un Browniano.

Notación $\quad dX = f(t)dt + d\eta(t)$

$$\Delta\eta \equiv \xi(t)\sqrt{\Delta t} = \eta(t+\Delta t) - \eta(t)$$

Ahora se pueden considerar sistemas discretos más complejos

añadir después.

$$X_{i+1} = X_i + f(t_i, \cancel{X_i})\Delta t + G(t_i, \cancel{X_i})\Delta\eta(t_i)$$

$$\Downarrow$$

$$X(T) = X_0 + \int_0^T f(\cancel{t, X})dt + \int_0^T G(t, \cancel{X(t)})\, d\eta(t)$$

(entendido como el límite de $N\to\infty$

$$X_N \equiv X_0 + \sum_{i=1}^{N-1} f(t_i, \cancel{X_i})\Delta t + \sum_{i=1}^{N-1} G(t_i, \cancel{X_i})\left(\eta(t_{i+1}) - \eta(t_i)\right)$$

De manera "natural":

i) $G(t_i)$ es medible respecto de las σ-álgebras de $\eta(t_j)$, $0 \le j \le i$

ii) $G(t_i)$ es independiente de $(\eta(t_{i+1}) - \eta(t_i))$ y de $\eta(t_{j+1}) - \eta(t_j)$, $\forall j \geq i$

Propiedades del Mov Browniano

1) Propiedades (E.38)

i) $W(0)=0$ a.e.

ii) $W(t)-W(s) \sim N(0, t-s) \quad \forall t \geq s \geq 0$

iii) $\forall n \; \forall \, 0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$, $W(t_1), W(t_2)-W(t_1), \dots, W(t_n)-W(t_{n-1})$ son independientes

(+) iv) Caminos continuos

2) Construcción para $t \in [0,1]$ con series de Fourier. (E.42)

Si $\{\varphi_n(t)\}_n$ es base de Hilbert en $L^2(0,1)$

(RUIDO BLANCO)

Sea $\xi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \varphi_n(t) \qquad 0 \leq t \leq 1$

$$A_n = \int_0^1 \xi(t)\varphi_n(t)dt$$

Supongamos $A_n = A_n(\omega)$ son independientes $N(0,1)$, $E(A_n)=0$

$$E(A_n \cdot A_m) = \int_0^1\int_0^1 \underbrace{E(\xi(t)\xi(s))}_{\delta_0(t-s)} \varphi_n(t)\varphi_m(s)\,dtds \qquad \delta_0(t-s) \Longleftarrow \boxed{HIP}$$

$$= \int_0^1 \varphi_n(s)\varphi_m(s)\,ds = \delta_{n,m} \underset{\text{OK}}{=} E(A_n)\cdot E(A_m)$$

$E(A_n^2)=1$

Entonces $W(t) = \int_0^t \xi(s)ds$ es mov Browniano $= \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{A_n \int_0^t \varphi_n(r)dr}_{N(0, (\int_0^t \varphi_n)^2)}$

i) $W(0)=0$

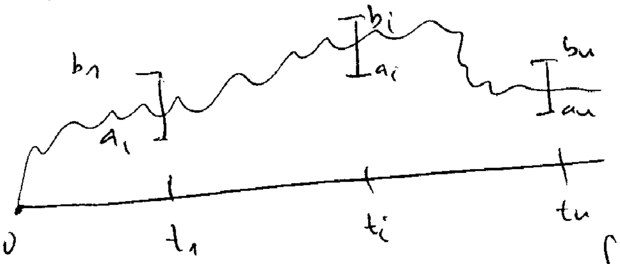
ii) $W(t)-W(s) \simeq \int_s^t \xi \simeq \sum_n \underbrace{A_n \int_s^t \varphi_n(r)dr}_{N(0, (\int_s^t \varphi_n)^2)}$

OBS Browniano en $\mathbb{R}^n$ $W=(W_1 \dots W_n)$ W_i browniano y son independientes

3) Probabilidades conjuntas (E38)

Dados $0 < t_1 < \dots < t_n$ y $a_i < b_i$ $i = 1 \dots n$

¿ $P(a_1 \le W(t_1) \le b_1, \dots, a_n \le W(t_n) \le b_n)$?



Fácilmente: $P(a_1 \le W(t_1) \le b_1) = \int_{a_1}^{b_1} \frac{e^{-x_1^2/2t_1}}{\sqrt{2\pi t_1}} dx_1$

Si ahora $W(t_1) = x_1 \in (a_1, b_1)$ parece razonable que en $[t_1, t_2]$ el proceso es

$N(x_1, t_2 - t_1) \Rightarrow$ la prob de caer en (a_2, b_2) es

$$\int_{a_2}^{b_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_2-t_1)}} e^{\frac{-(x_2-x_1)^2}{2(t_2-t_1)}} dx_2$$

y así

$$P(a_1 \le W(t_1) \le b_1, a_2 \le W(t_2) \le b_2) = \int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2} \frac{e^{-x_1^2/2t_1}}{\sqrt{2\pi t_1}} \cdot \frac{e^{-(x_2-x_1)^2/2(t_2-t_1)}}{\sqrt{2\pi(t_2-t_1)}} dx_2 dx_1$$

y tomando $g(x,t|y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{\frac{-(x-y)^2}{2t}}$

$P(a_1 \le W(t_1) \le b_1, \dots, a_n \le W(t_n) \le b_n) =$

$$\int_{a_1}^{b_1} \dots \int_{a_n}^{b_n} g(x_1, t_1|0)\, g(x_2, t_2-t_1|x_1) \dots g(x_n, t_n - t_{n-1}|x_{n-1}) dx_n \dots dx_1$$

De hecho

Teorema $\forall n$ y $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_n$ y $\forall f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$E(f(W(t_1), \dots W(t_n))) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1 \dots x_n)\, g(x_1, t_1|0)\, g(x_2, t_2-t_1|x_1) \dots g(x_n, t_n - t_{n-1}|x_{n-1}) dx_n \dots dx_1$$

4) Continuidad, no diferenciabilidad de caminos

<u>Teorema</u> Si $\{X(t)\}_t$ es un proceso estocástico $(X : \mathbb{R}^+ \times \Omega \to \mathbb{R}$ medible$)$

con caminos continuos y

$$E\left(|X(t) - X(s)|^{\beta} \right) \leq C|t-s|^{1+\alpha}$$

Entonces $\forall\, 0 < \gamma < \frac{\alpha}{\beta}$ $T > 0$ y a.e. $\omega \in \Omega$ $\exists\, K = K(\omega, \gamma, T)$ "

$$|X(t,\omega) - X(s,\omega)| \leq K|t-s|^{\gamma} \qquad 0 \leq s \leq t \leq T$$

Para el Browniano (en $\mathbb{R}^n$ o.c.)

$$E\left(|W(t) - W(s)|^{2m} \right) = \frac{1}{(2\pi r)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} |x|^{2m} e^{-\frac{|x|^2}{2r}} dx \qquad r = t-s$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} r^m \int_{\mathbb{R}^n} |y|^{2m} e^{-|y|^2/2} dy \qquad \left(y = \frac{x}{\sqrt{r}} \right)$$

$$= c\, r^m = C|t-s|^m$$

$$\Rightarrow \gamma < \frac{\alpha}{\beta} = 1/2 - \frac{1}{2m} \quad \forall m.$$

<u>Teorema</u> (Dvoretzky, Erdos, Kakutani)

i) $\forall\, 1/2 < \gamma \leq 1$ y a.e $\omega \in \Omega$ $t \mapsto w(t,\omega)$ no es Hölder de exp γ en ningún t

ii) En partic a.e $\omega \in \Omega$ $t \to W(t,\omega)$ no es diferenciable en ningún punto y es de variación infinita en cualquier subintervalo. $\Rightarrow$

<u>OBS</u> c.t.p. ω $\int_0^t G\, dW$ no está definida como integral de Lebesgue-Stieltjes.

5) Variación cuadrática

<u>Thm</u> Sea $(a,b) \subset [0,\infty)$ y $P^n = \{a = t_0^n < \ldots < t_{m_n}^n = b\}$ una partición, $|P^n| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Entonces $\displaystyle\sum_{k=0}^{m_n - 1} \left(w(t_{k+1}^n) - w(t_k^n) \right)^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} (b-a)$ en $L^2(\Omega)$

- Una demostración en un ~~caso~~ más ~~simple~~ débil: suponga $t_{k+1}^n - t_k^n = \frac{(b-a)}{m_n}$

$$S_n = \sum_{k=0}^{m_n-1} \left(W(t_{k+1}^n) - W(t_k^n) \right)^2 = (b-a) \sum_{k=0}^{m_n-1} \frac{1}{m_n} \underbrace{\left(\frac{W(t_{k+1}^n) - W(t_k^n)}{\sqrt{\frac{b-a}{m_n}}} \right)}_{Z_{n,k} \sim N(0,1)}^2 = (b-a) \sum_{k=0}^{m_n-1} \frac{1}{m_n} Z_{n,k}^2$$

v.a iid con media 1 y varianza finita

La Ley Fuerte de los Grandes Números

$$\sum_{k=0}^{m_n-1} \frac{1}{m_n} Z_{nk}^2 \longrightarrow 1 \quad \boxed{\text{ctp}}$$

$$\boxed{\text{Notación } (dW)^2 = dt}$$

$\exists$ tomando subsucesiones podemos suponer que
$$\sum_{k=0}^{m_n-1}\left(W(t_{k+1}^n)-W(t_k^n)\right)^2 \longrightarrow (b-a) \quad ctp$$
hay converg. puntual y el camino $W(t,\omega)$ es Hölder de exp $\gamma<\frac{1}{2}$ $\Rightarrow$

dec u $\|$

$$(b-a)\leq K \limsup_n |P^n|^{\gamma}\sum_{k=0}^{m_n-1}\left|W(t_{k+1}^n,\omega)-W(t_k^n,\omega)\right|$$
$$\Rightarrow \quad ctp\ \omega\in\Omega \quad \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{m_n-1}\left|W(t_{k+1}^n,\omega)-W(t_k^n,\omega)\right| = \infty$$

6) Propiedad de Markov (E, 55)

<u>Def</u> si $\mathcal{Q}\subset\mathcal{F}$ es un σ-algebra y $A\in\mathcal{F}$

i) $$P(A|\mathcal{Q}) = E(\chi_A|\mathcal{Q}) \quad \text{(es una v.a.)}$$

ii) si $\{X(t)\}_t$ es un proc. estocástico $\quad \mathcal{F}_s=\mathcal{F}(\{X(r), r\leq s\})$

iii) El proc. estoc es un proc. de Markov si
$$P(X(t)\in B|\mathcal{F}_s) = P(X(t)\in B|X(s))$$

<u>thm</u> si $\{W(t)\}_t$ es un Browniano (en $\mathbb{R}^n$ o:) entonces es un proc. de Markov y
$$P(W(t)\in B|W(s)) = \frac{1}{(2\pi(t-s))^{n/2}}\int_B e^{-\frac{|x-W(s)|^2}{2(t-s)}}dx \qquad a.e.\ \omega\in\Omega.$$

7) Martingala

$$E(W(t)|\mathcal{F}_s) = E(W(t)-W(s)|\mathcal{F}_s) + E(W(s)|\mathcal{F}_s)$$
$$\overset{\downarrow(\text{indep})}{=} E(W(t)-W(s)) + W(s) = W(s)$$

8) Esperanza condicionada

1) $A\in\mathcal{F}, B\in\mathcal{F}$ $\qquad P(A|B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$

2) si X v.a. $\qquad E(X|B) = \dfrac{1}{P(B)}\int_B X\,dP = \dfrac{1}{P(B)}E(\chi_B\cdot X)$ $\qquad$ OBS $\mathcal{F}(Y)=[\{A_i, i=1..m\}]$

3) si X, Y v.a $\quad$ ¿ $E(X|Y)$?

Supongamos $Y=\sum_{i=1}^m a_i\chi_{A_i}$ es simple (disjuntos) $\quad$ así debe ser

OBS no depende de los $\{a_i\}_i$ sino de $\{A_i\}$

$$E(X|Y) = \begin{cases}\frac{1}{P(A_1)}\int_{A_1}X\,dP & \text{en } A_1\\ \vdots \\ \frac{1}{P(A_m)}\int_{A_m}X\,dP & \text{en } A_m\end{cases} = \sum_{i=1}^m E(X|A_i)\chi_{A_i}$$

- es una v.a.
- es $\mathcal{F}(Y)$ medible
- $\forall A\in\mathcal{F}(Y)$ $\quad \int_A X\,dP=\int_A E(X|Y)\,dP$

Si Y es arbitraria $E(X|Y)$ es una v.a.,

$$\int_A X\,dP = \int_A E(X|Y)\,dP \quad \forall A \in \mathcal{F}(Y)$$

Como no depende de los valores de Y: si $\mathcal{Q} \subset \mathcal{F}$ σ-algebra $\Rightarrow E(X|\mathcal{Q})$ es v.a.,

a) es $\mathcal{Q}$ medible

b) $\int_A X\,dP = \int_A E(X|\mathcal{Q})\,dP \quad \forall A \in \mathcal{Q}$

(e.d $E(X|\mathcal{Q})$ es la mínima v.a., podemos calcular $\int_A X\,dP \;\; \forall A \in \mathcal{Q}$)

<u>OBS</u> Si trabajamos con $X \in L^2(\Omega)$ y $\mathcal{Q} \subset \mathcal{F}$ σ-algebra

$L^2(\mathcal{Q}) = \{ \xi : \Omega \to \mathbb{R} \;\; \mathcal{Q}\text{-medible} \;\; E(\xi^2) < \infty \}$ es un subespacio cerrado.

Si $X \in L^2(\Omega)$ su proyección sobre $L^2(\mathcal{Q})$ se caracteriza por

$$\langle X, \xi \rangle = \langle \operatorname{Proy}(X), \xi \rangle \quad \forall \xi \in L^2(\mathcal{Q})$$

(las func. simples son densas en $L^2(\mathcal{Q})$)

En partic $\xi = \chi_A \quad A \in \mathcal{Q}$

$$\int_A X\,dP = \int_A \operatorname{Proy}(X)\,dP$$

Integral Estocástica

$\{W(t)\}_t$ Browniano

Def

i) $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}(\{W(s), s \leq t\})$ "historia"

ii) $\mathcal{F}_t^+ = \mathcal{F}(\{W(s) - W(t), s \geq t\})$ "futuro"

Def $\{\mathcal{Q}_t\} \subset \mathcal{F}$ es noanticipativa (respecto de $\{W(t)\}_t$) si (filtración)

a) $\mathcal{Q}_t \uparrow$

b) $\mathcal{Q}_t \supset \mathcal{F}_t$

c) $\mathcal{Q}_t$ es indep de $\mathcal{F}_t^+$

Def i) $\{G(t)\}_t$ proc. estocástico es noanticipativo respecto de $\{\mathcal{Q}_t\}$ si $\forall t$ $G(t)$ es $\mathcal{F}_t$ medible.

adaptado

ii) $\{G(t)\}_t$ proc estocástico es progresivamente medible (respecto de $\{W(t)\}$) si $\forall t$ $\underset{[0,t]\times\Omega}{(s,\omega)} \longmapsto G(s,\omega)$ es medible respecto a $\mathcal{B}_{[0,T]} \times \mathcal{F}_t$

Def

i) $\mathbb{L}^2(0,T)$ son los procesos progresivamente medibles $\ni$ $E\left(\int_0^T G^2 dt\right) < \infty$ $\quad \left(= \int_0^T E(G^2)dt\right)$

ii) idem $\mathbb{L}^1(0,T)$

<u>OBS</u> $\mathbb{L}^2(0,T) \subset L^2(0,T)$
$\mathbb{L}^1(0,T) \subset L^1(0,T)$

Def i) $G \in \mathbb{L}^2(0,T)$ es un proc. simple si $G(t) = \sum_{k=0}^{m-1} G_k \chi_{[t_k, t_{k+1})}$

G_k es $\mathcal{F}(t_k)$ medible

<u>OBS</u> G_k es indep de $(W(t_{k+1}) - W(t_k))$

$\Downarrow$

$E\left(\int_0^T G dW\right) = 0$

ii) $\int_0^T G dW = \sum_{k=0}^{m-1} G_k (W(t_{k+1}) - W(t_k))$ (es v.a.)

<u>OBS</u> es $\mathcal{F}_T$ medible

<u>OBS</u> $E\left(\left(\int_0^T G dW\right)^2\right) = E\left(\int_0^T G^2 dt\right)$ ya que

$E\left(\left(\int_0^T G dW\right)^2\right) = \sum_{k,j}^{m-1} E\left(G_k G_j (W(t_{k+1}) - W(t_k))(W(t_{j+1}) - W(t_j))\right) = \sum_{k=0}^{m-1} E\left(G_k^2 (W(t_{k+1}) - W(t_k))^2\right) = \sum_k^{m-1} E(G_k^2) \underbrace{E\left[(W(t_{k+1}) - W(t_k))^2\right]}_{t_{k+1} - t_k}$

$= E\left(\int_0^T G^2 dt\right)$

$\Downarrow \leftarrow$ ya que si $j < k$

$E\big(G_k G_j \underbrace{(W(t_{j+1}) - W(t_j))}_{\wedge\, \infty}\big) \underbrace{E\left(W(t_{k+1}) - W(t_k)\right)}_{= 0}$

$\boxed{\text{e.d. } \int_0^T G dW \in L^2(\Omega)}$

Proposición

i) Si $G \in \mathbb{L}^2(0,T) \Rightarrow \exists$ $\{G^n\}$ proc. simples en $\mathbb{L}^2(0,T)$ /

$$E\left(\int_0^T |G - G^n|^2 dt\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

ii) Si $\{G^n\}$, $\{G^m\}$ lo verifican $\Rightarrow$ $E\left(\int_0^T |G^n - G^m|^2 dt\right) \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0$

y así $\int_0^T G\,dW = \lim_n \int_0^T G^n\,dW$ existe en $L^2(\Omega)$ y es indep de la sucesión de suc. simples.

Teorema

i) $\int_0^T (aG + bH)\,dW = a\int_0^T G\,dW + b\int_0^T H\,dW$

ii) $E\left(\int_0^T G\,dW\right) = 0$

iii) $E\left(\left(\int_0^T G\,dW\right)^2\right) = E\left(\int_0^T G^2\,dt\right)$

iv) $E\left(\int_0^T G\,dW \int_0^T H\,dW\right) = E\left(\int_0^T GH\,dt\right)$

Teorema

Si $G \in \mathbb{L}^2(0,T)$

$$I(t) = \int_0^t G\,dW \qquad 0 \le t \le T$$

i) $\{I(t)\}_t$ es una martingala

ii) $\{I(t)\}_t$ tiene caminos continuos

Ejemplo

$$\int_0^t W\,dW = \frac{1}{2}W^2(t) - \frac{t}{2}$$

$$\left(\text{y} \quad \int_s^t W\,dW = \frac{1}{2}\left(W^2(t) - W^2(s)\right) - \frac{1}{2}(t-s) \qquad t \geq s > 0 \right)$$

- Demostr tomando una partición $t_0 = 0 < \dots < t_m = t$

$$\sum_{k=0}^{m-1} W(t_k)\left(W(t_{k+1}) - W(t_k)\right) = \cancel{\sum_{k=0}^{m-1} W(t_{k+1})\left(W(t_{k+1}) - W(t_k)\right) - \sum_{k=0}^{m-1}\left(W(t_{k+1}) - W(t_k)\right)\left(W(t_{k+1}) - W(t_k)\right)} = \cancel{-\sum_{k=0}^{m-1}\left(W(t_{k+1}) - W(t_k)\right)^2}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{m-1} W^2(t_{k+1}) - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{m-1} W^2(t_k)}_{\frac{W^2(t)}{2}} - \frac{1}{2}\underbrace{\sum_{k=0}^{m-1}\left(W(t_{k+1}) - W(t_k)\right)^2}_{\downarrow\, |P^n| \to 0 \quad L^2(\Omega)}$$

$$\frac{1}{2}t$$